$$\text{Soit } \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n \, dx \geq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{I_n \geq 0}$$

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{n+1}(x) - \tan^n(x) \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \left(\tan(x) - 1 \right) dx$$

$x \mapsto \tan^n(x)\left(\tan(x) - 1\right)$ est

continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

on a $\tan^n(x) \geq 0$

et $\tan(x) - 1 \leq 0$

Car $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$\tan(x) \leq 1$